МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

УТВЕРЖДАЮ:
Декан факультета дополнительного
образования детей и взрослых
_________ / З.С. Акманова___
«25» декабря _2020_ г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине
МАТЕМАТИКА: Подготовка к ЕГЭ

Возраст обучающихся от _16_ лет

Срок реализации _102_ часа

Рабочая программа
составлена:
Зав. каф. ПМиИ, ктн, доцент
(должность, ученая степень, ученое звание)
_________/Ю.А. Извеков/
(подпись) И.О. Фамилия)

Магнитогорск – 2020

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

1.1 Нормативно-правовые основания разработки программы:
– Федеральный закон от 29 декабря 2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации»;
– Приказ Минпросвещения России от 09.11.2018 N 196 (ред. от 05.09.2019) «Об утверждении Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по дополнительным общеобразовательным программам».

1.2 Направленность программы
Направленность представленной образовательной программы - социально-педагогическая, способствует формированию систематизированных знаний, умений и навыков или компетентности в изучаемой предметной области, по изучаемому предмету, необходимых для успешной сдачи экзамена, социализации выпускника в обществе

1.3 Новизна, актуальность, педагогическая целесообразность
Новизна образовательной программы опирается на большой опыт педагога в подготовке к итоговой аттестации, разработанную методику, позволяющую в сравнительно небольшой период времени систематизировать изученный в школе материал, чтобы каждый из учеников смог реализовать багаж полученных знаний, практических умений и навыков на экзамене в максимальном объеме, и в дальнейшем образовании смог применить полученный опыт в построении своей образовательной стратегии

1.4 Отличительные особенности программы
Актуальность и педагогическая целесообразность образовательной программы доказывается востребованностью у будущих выпускников и их родителей предлагаемых к изучению курсов по подготовке к итоговой аттестации. Зачастую в школе не всегда есть время погрузиться в доскональную предметную подготовку к экзамену. Даже разделение выпускных классов на профили не спасает положения, когда подготовка по некоторым, нужным именно этому выпускнику, предметам недостаточна. Программа способствует реализации положений ст. 35 Федерального закона «Об образовании в Российской Федерации» от 29.12.2012 года № 273-ФЗ о праве на формирование своей индивидуальной образовательной траектории, направленной на развитие своих потребностей и интересов, и положения Концепции развития дополнительного образования детей, утвержденная распоряжением правительства РФ от 04.09.2014 г. № 1726-р об обеспечении доступности и свободы выбора программ внешкольного образования и социализации.

1.5 Категории (возраст) обучающихся
Образовательная программа расчитана на учащихся 11 класса средней общеобразовательной школы и СПО.

1.6 Срок освоения программы __153____ час.
Сроки реализации (продолжительность обучения)__17 недель.__________________

1.7 Форма обучения очная.

1.8 Формы и режим занятий обучающихся
Программа рассчитана на 102 часа аудиторной нагрузки, и реализуется по 6 академических часов один раз в неделю, всего 17 недель, и 51 час самостоятельной работы обучающихся. Структура курса предусматривает лекции, практические занятия и самостоятельная индивидуальная работа при выполнении домашних заданий.

2 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ПРОГРАММЫ

Основная цель программы – формирование личности, его мировоззрения, с помощью формирования у него систематизированных знаний, умений и навыков или компетентности в изучаемой предметной области, по математике, необходимых для успешной сдачи экзамена.

– Обеспечение усвоения системы математических знаний, умений и навыков; сформировать представление о прикладных возможностях математики;

– практическая помощь учащимся в подготовке к Единому государственному экзамену по математике через повторение, систематизацию, расширение и углубление знаний;

– создание условий для дифференциации и индивидуализации обучения, выбора учащимися разных категорий индивидуальных образовательных траекторий в соответствии с их способностями, склонностями и потребностями;

– интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых человеку для жизни в современном мире.

В процессе реализации программы решаются следующие задачи:

- *обучающие* – овладение математическими понятиями и символикой, формирование определенных математических умений и навыков, изучение новых математических фактов, методов, приемов;

- *развивающие*- формирование у учащихся аналитического мышления (в ходе усвоения приемов мыслительной деятельности, таких как анализ, сравнение, систематизация, обобщение); развитие памяти, кругозора; умений выделять главное, преодолевать трудности при решении более сложных задач; развитие математической речи;

- *воспитательные* – формирование мировоззрения; логической и эвристической составляющих мышления; воспитание трудолюбия, целеустремленности, активности, самостоятельности и ответственности;

- *коррекционные* – восполнение пробелов в математических знаниях учащихся, владении их некоторыми, неиспользуемыми, зачастую, в школе, методами и приемами решения задач; коррекция недостатков или неправильно сформированных навыков и умений.

3 ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ПРОГРАММЫ

В результате освоения дополнительной образовательной программы обучающиеся должны:

знать: основные формулы, теоремы и преобразования, применяемые при решении задач алгебры и геометрии;

уметь:

– проводить тождественные преобразования иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических выражений;

– решать иррациональные, логарифмические и тригонометрические уравнения и неравенства;

– решать системы уравнений изученными методами;

– строить графики элементарных функций и проводить преобразования графиков, используя изученные методы;

– применять аппарат математического анализа к решению задач;

– применять основные методы геометрии (проектирования, преобразований, векторный, координатный) к решению геометрических задач.

4 УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№ п/п	Наименование тем	Трудоемкость, час	Всего, ауд. Часов	В том числе		Дистанционные занятия, час	Самост. работа, час	Форма контроля
				лекции	практич. Занятия			
1	**Тригонометрия**	23	12	6	6	0	11	текущий
2	**Выражения и их преобразования. Уравнения и неравенства**	46	36	18	18	0	10	Текущий, промежуточный
3	**Функции**	28	18	9	9	0	10	Текущий
4	**Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей**	7	2	1	1	0	5	Текущий
5	**Геометрия**	49	34	15	19	0	15	Текущий, итоговый
	ИТОГО	**153**	**102**	**49**	**53**	**0**	**51**	

5 СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

Дисциплина (Модуль) 1. Наименование раздела, дисциплины (модуля).

№ п/п	Наименование темы	Содержание обучения по темам, наименование и тематика практических занятий, самостоятельной работы
1	**Тригонометрия**	
1.1	Тригонометрические функции, их свойства, графики	Построение графиков тригонометрических функций с помощью преобразований.
1.2	Преобразование тригонометрических выражений	Преобразование тригонометрических выражений.
1.3.	Тригонометрические уравнения и неравенства	Решение простейших уравнений, неравенств.
1.4.	Решение задач типа задания 13: тригонометрические уравнения с отбором корней. Контрольная работа	Решение тригонометрические уравнений с отбором корней.
2	**Выражения и их преобразования. Уравнения и неравенства**	
2.1	Тождественные преобразования алгебраических выражений	Формулы сокращенного умножения. Разложение многочлена на множители. Преобразование алгебраических выражений.

2.2	Уравнение и неравенства с одной переменной	Метод разложения на множители и метод введения новой переменной для решения уравнений.
2.3.	Уравнения и неравенства с модулем	Решение уравнений и неравенств с модулем.
2.4.	Системы уравнений. Приёмы решения систем уравнений	Решение систем уравнений. Решение систем линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными методом Гаусса.
2.5.	Решение текстовых задач	Решение текстовых задач с помощью уравнений и их систем.
2.6.	Задачи на проценты. Задачи на прогрессии. Решение задач типа задания 17: задачи с экономическим содержанием. Контрольная работа	Решение текстовых задач с помощью формул для арифметической и геометрической прогрессии.
2.7.	Иррациональные уравнения и неравенства	Решение иррациональных уравнений и неравенств.
2.8.	Задачи с параметрами. Решение задач типа задания 18	Решение задач с параметром типа задания 18.
2.9.	Показательные уравнения и неравенства. Решение задач типа задания 15	Решение показательных уравнений и неравенств. Решение задач типа задания 15.
2.10.	Логарифмические уравнения и неравенства. Решение задач типа задания 15	Решение логарифмических уравнений и неравенств. Решение задач типа задания 15.
2.11.	Системы показательных и логарифмических уравнений и неравенств	Решение систем показательных и логарифмических уравнений и неравенств.
3	**Функции**	
3.1.	Преобразование графиков функций	Графики основных элементарных функций. Построение графиков функций с помощью преобразований.
3.2.	Графическое решение уравнений, неравенств и их систем	Решение уравнений и неравенств графическим методом.
3.3.	Степень с рациональным показателем. Степенная функция, свойства, график	Построение графиков функций.
3.4.	Показательная и логарифмическая функции, свойства графики	Построение графиков функций.
3.5.	Производная. Приложения производной	Нахождение наибольших и наименьших значений функций на отрезке, промежутков монотонности, точек экстремума.
3.6.	Первообразная функция и интеграл. Приложения	Определенный интеграл, его вычисление и свойства; вычисление площадей плоских фигур; примеры применения интеграла в физике.
4	**Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей**	
4.1.	Комбинаторика.	
4.2.	Теория вероятностей	Вычисление вероятностей событий с

		помощью формул комбинаторики. Вычисление вероятностей событий с помощью теорем сложения и умножения вероятностей.
5	**Геометрия**	
5.1.	Векторы на плоскости и в пространстве	Решение стереометрических задач с помощью векторов.
5.2.	Метод координат на плоскости и в пространстве	Применение координат к решению задач по стереометрии.
5.3.	Решение задач типа задания 14: расстояния и углы в пространстве	Решение стереометрических задач на нахождение углов и расстояний.
5.4.	Планиметрия. Треугольники, четырехугольники. Решение задач типа задания 16. Контрольная работа	Решение треугольников. Решение задач типа задания 16.
5.5.	Вписанные и описанные многоугольники. Решение задач типа задания 16	Решение задач на вписанную и описанную окружности. Решение задач типа задания 16.
5.6.	Стереометрия. Сечения многогранников	Построение сечений многогранников. Решение задач на нахождение площадей сечений. Решение задач типа задания 14.
5.7.	Площади поверхностей и объёмы многогранников и тел вращения. контрольная работа	Решение задач на нахождение объемов многогранников и тел вращения. Решение задач на нахождение площадей поверхностей многогранников и тел вращения. Решение задач типа задания 14.
5.8.	Задачи на комбинации многогранников и тел вращения	Решение задач на комбинации многогранников и тел вращения. Решение задач типа задания 14.
Практические занятия	Практические и семинарские занятия	
Самостоятельная работа	Изучение литературы, выполнение практических заданий, опрос	

6. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ

6.1 Материально-техническое обеспечение
Занятия проводятся в аудиториях, оснащенных необходимым для организации образовательного процесса оборудованием:
- доска;
- наглядные пособия и дидактические материалы;
- портал https://dpklms.magtu.ru/ .

6.2 Информационное и учебно-методическое обеспечение
а) Основная литература:
1. Математика. Подготовка к ЕГЭ 2019. Профильный уровень. / Д.А. Мальцев, А.А. Мальцев, Л.И. Мальцева. – Ростов н/Д: Издатель Мальцев Д.А.; М.: Народное образование, 2018. – 224 с.

2. Математика. Подготовка к ЕГЭ 2019. Задания части 1 по алгебре. / Д.А. Мальцев, А.А. Мальцев, Л.И. Мальцева. – Ростов н/Д: Издатель Мальцев Д.А.; М.: Народное образование, 2018. – 171 с.
3. Математика. Подготовка к ЕГЭ 2019. Задания части 1 по геометрии. / Д.А. Мальцев, А.А. Мальцев, Л.И. Мальцева. – Ростов н/Д: Издатель Мальцев Д.А.; М.: Народное образование, 2018. – 108 с.
4. Балаян Э.Н. Новый репетитор по геометрии для подготовки к ГИА и ЕГЭ / Э.Н. Балаян. – Ростов н/Д: Феникс, 2015. – 559 с.
5. Сергеев И.Н. ЕГЭ Практикум по математике: подготовка к выполнению части 2 / И.Н. Сергеев, В.С. Панферов. – М.: Издательство «Экзамен», 2016. – 126 с.
б) Дополнительная литература:
1. ЕГЭ 2018. Математика Типовые тестовые задания. Профильный уровень / под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2018. – 80 с.
2. Балаян Э.Н. Тренажер по математике для подготовки к ЕГЭ и олимпиадам (с решениями): 7-11 классы: профильный уровень / Э.Н. Балаян. – Ростов н/Д: Феникс, 2015. – 219 с.
3. Балаян Э.Н. Лучшие задачи на готовых чертежах для подготовки к ГИА и ЕГЭ: 7-11 классы / Э.Н. Балаян. – Ростов н/Д: Феникс, 2013. – 274 с.
в) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:
www.alexlarin.net
www.reshuege.ru
www.mathus.ru

7 ФОРМЫ КОНТРОЛЯ

Раздел/ тема дисциплины	Вид самостоятельной работы	Кол-во часов	Формы контроля
1. Тригонометрия			
1.1. Тригонометрические функции, их свойства, графики	Изучение литературы, выполнение практических заданий и тестов	1,5	Опрос
1.2. Преобразование тригонометрических выражений	Изучение литературы, выполнение практических заданий	1,5	Опрос
1.3. Тригонометрические уравнения и неравенства	Изучение литературы, выполнение практических заданий	1,5	Текущий контроль
1.4. Решение задач типа задания 13: тригонометрические уравнения с отбором корней	Изучение литературы, выполнение практических заданий	1,5	Опрос
Итого по разделу		6	Контрольная работа
2. Выражения и их преобразования. Уравнения и неравенства			
2.1. Тождественные преобразования алгебраических выражений	Изучение литературы, выполнение практических заданий	2	Опрос
2.2. Уравнение и неравенства с одной переменной	Изучение литературы, выполнение практических заданий	1,5	Опрос
2.3. Уравнения и неравенства с	Изучение литературы,	1,5	Опрос

Раздел/ тема дисциплины	Вид самостоятельной работы	Кол-во часов	Формы контроля
модулем	выполнение практических заданий		
2.4. Системы уравнений. Приёмы решения систем уравнений	Изучение литературы, выполнение практических заданий	1,5	Опрос
2.5. Решение текстовых задач	Изучение литературы, выполнение практических заданий	1,5	Опрос
2.6. Задачи на проценты. Задачи на прогрессии. Решение задач типа задания 17: задачи с экономическим содержанием	Изучение литературы, выполнение практических заданий	1	Текущий контроль
2.7. Иррациональные уравнения и неравенства		1	Опрос
2.8. Задачи с параметрами. Решение задач типа задания 18	Изучение литературы, выполнение практических заданий	3	Опрос
2.9. Показательные уравнения и неравенства. Решение задач типа задания 15	Изучение литературы, выполнение практических заданий	1,5	Опрос
2.10. Логарифмические уравнения и неравенства. Решение задач типа задания 15	Изучение литературы, выполнение практических заданий	1,5	Опрос
2.11. Системы показательных и логарифмических уравнений и неравенств	Изучение литературы, выполнение практических заданий	2	Опрос
Итого по разделу		18	Контрольная работа
3. Функции			
3.1. Преобразование графиков функций	Изучение литературы, выполнение практических заданий	2	Опрос
3.2. Графическое решение уравнений, неравенств и их систем	Изучение литературы, выполнение практических заданий	2	Опрос
3.3. Степень с рациональным показателем. Степенная функция, свойства, график	Изучение литературы, выполнение практических заданий	2	Текущий контроль
3.4. Показательная и логарифмическая функции, свойства графики	Изучение литературы, выполнение практических заданий	2	Опрос
3.5. Производная. Приложения производной	Изучение литературы, выполнение практических заданий	2	Опрос
3.6. Первообразная функция и интеграл. Приложения	Изучение литературы, выполнение практических заданий	2	Опрос
Итого по разделу		12	Текущий контроль
4. Элементы комбинаторики,			

Раздел/ тема дисциплины	Вид самостоятельной работы	Кол-во часов	Формы контроля
статистики и теории вероятностей			
4.1. Комбинаторика. Теория вероятностей	Изучение литературы, выполнение практических заданий	1	Опрос
Итого по разделу		1	Текущий контроль
5. Геометрия			
5.1. Векторы на плоскости и в пространстве	Изучение литературы, выполнение практических заданий	1	Опрос
5.2. Метод координат на плоскости и в пространстве	Изучение литературы, выполнение практических заданий	1	Опрос
5.3. Решение задач типа задания 14: расстояния и углы в пространстве	Изучение литературы, выполнение практических заданий	2	Опрос
5.4. Планиметрия. Треугольники, четырехугольники. Решение задач типа задания 16	Изучение литературы, выполнение практических заданий	2	Контрольная работа
5.5. Вписанные и описанные многоугольники. Решение задач типа задания 16	Изучение литературы, выполнение практических заданий	2	Опрос
5.6. Стереометрия. Сечения многогранников	Изучение литературы, выполнение практических заданий	2	Опрос
5.7. Площади поверхностей и объёмы многогранников и тел вращения	Изучение литературы, выполнение практических заданий	2	Текущий контроль
5.8. Задачи на комбинации многогранников и тел вращения	Изучение литературы, выполнение практических заданий	2	Опрос
Итого по разделу		14	Контрольная работа
Итого по дисциплине		51	Итоговый контроль

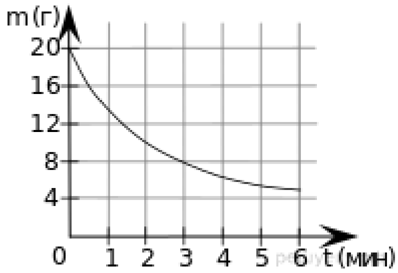
Типовой вариант

Вариант № 1

1. Задание 1

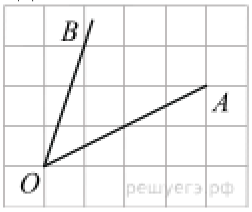
В книге Елены Молоховец «Подарок молодым хозяйкам» имеется рецепт пирога с черносливом. Для пирога на 10 человек следует взять 1/10 фунта чернослива. Сколько граммов чернослива следует взять для пирога, рассчитанного на 3 человек? Считайте, что 1 фунт равен 0,4 кг.

2. Задание 2



В ходе химической реакции количество исходного вещества (реагента), которое еще не вступило в реакцию, со временем постепенно уменьшается. На рисунке эта зависимость представлена графиком. По горизонтали откладывается время в минутах, прошедшее с момента начала реакции, по вертикали — масса оставшегося реагента, который еще не вступил в реакцию (в граммах). Определите по графику, сколько граммов реагента вступило в реакцию за три минуты?

3. Задание 3



На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.

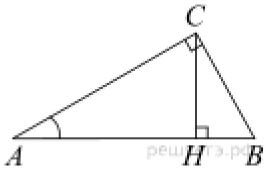
4. Задание 4

В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты лежат теперь в разных карманах.

5. Задание 5

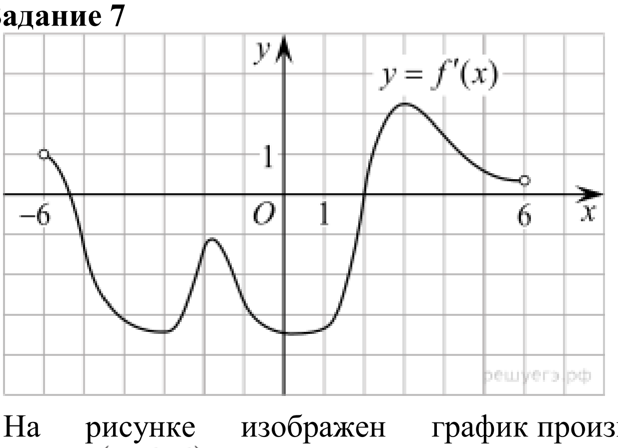
Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}=-1.$ В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

6. Задание 6



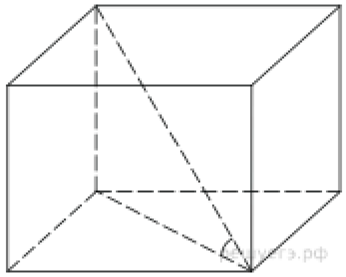
В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, *CH* — высота, $AB=13$, $\operatorname{tg}A=5.$ Найдите *BH*.

7. Задание 7



На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

8. Задание 8



Одна из граней прямоугольного параллелепипеда — квадрат. Диагональ параллелепипеда равна $\sqrt{8}$ и образует с плоскостью этой грани угол 45°. Найдите объем параллелепипеда.

9. Задание 9

Найдите $\dfrac{g(2-x)}{g(2+x)}$, если $g(x) = \sqrt[3]{x(4-x)}$ при $|x| \neq 2$.

10. Задание 10

Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы, определяемой по формуле $A(\omega) = \dfrac{A_0\omega_p^2}{|\omega_p^2 - \omega^2|}$, где ω – частота вынуждающей силы (в c^{-1}), A_0 – постоянный параметр, $\omega_p = 360c^{-1}$ – резонансная частота. Найдите максимальную частоту ω, меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более чем на $12,5\%$. Ответ выразите в c^{-1}.

11. Задание 11

В понедельник акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а во вторник подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

12. Задание 12

Найдите наибольшее значение функции $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+6x+12)$ на отрезке $[-19;-1]$.

13. Задание 13

а) Решите уравнение $|\cos x + \sin x| = \sqrt{2}\sin 2x$.

б) Найдите решения уравнения, принадлежащие отрезку [3; 5].

14. Задание 14

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна $2\sqrt{3}$, а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N — середины рёбер CD и AB, соответственно, а NT — высота пирамиды $NSCD$ с вершиной N и основанием SCD.

а) Докажите, что точка T является серединой SM.

б) Найдите расстояние между NT и SC.

15. Задание 15

Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+1}{(x+2)^2} + \frac{x^2+2x+1}{(x-3)^2} \leq \frac{(2x^2-x+5)^2}{2(x+2)^2(x-3)^2}.$$

16. Задание 16

В треугольнике ABC угол ABC тупой, H — точка пересечения продолжений высот, угол AHC равен 60°.

а) Докажите, что угол ABC равен 120°.

б) Найдите BH, если $AB = 7, BC = 8$.

17. Задание 17

В одной стране в обращении находилось 1 000 000 долларов, 20% из которых были фальшивыми. Некая криминальная структура стала ввозить в страну по 100 000 долларов в месяц, 10% из которых были фальшивыми. В это же время другая структура стала вывозить из страны 50 000 долларов ежемесячно, из которых 30% оказались фальшивыми. Через сколько месяцев содержание фальшивых долларов в стране составит 5% от общего количества долларов?

18. Задание 18

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^4+(a-3)^2=|x-a+3|+|x+a-3|$ либо имеет единственное решение, либо не имеет решений.

19. Задание 19

На доске написано n чисел a_i (i = 1, 2, …, n). Каждое из них не меньше 50 и не больше 150. Каждое из этих чисел уменьшают на r_i%. При этом либо r_i = 2%, либо число a_i уменьшается на 2, то есть становится равным $a_i - 2$. (Какие-то числа уменьшились на число 2, а какие-то — на 2 процента).

а) Может ли среднее арифметическое чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ быть равным 5?

б) Могло ли так получиться, что среднее арифметическое чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ больше 2, при этом сумма чисел $a_1, a_2 \ldots a_n$ уменьшилась более чем на $2n$?

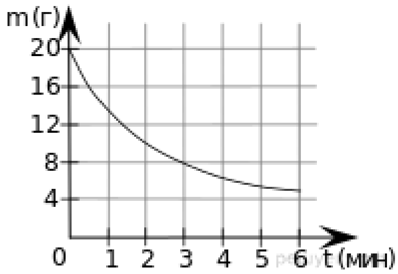
в) Пусть всего чисел 30, а после выполнения описанной операции их сумма уменьшилась на 40. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Решение типового варианта

1. Поскольку на 10 человек следует взять 0,1 фунта чернослива, на одного человека следует взять 0,01 фунта чернослива. Тогда на трех человек потребуется 0,03 фунта чернослива, что составляет 0,03 · 0,4 = 0,012 кг или 12 граммов.

Ответ: 12.

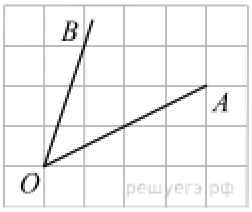
2.

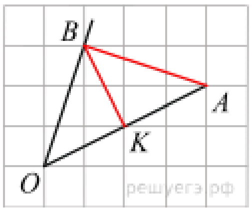


Из графика видно, что в начальный момент времени было 20 граммов реагента, а через три минуты его стало 8 граммов. Следовательно, прореагировало 12 граммов.

Ответ: 12.

3.





Достроим угол до треугольника *OBA*, *OB* = *BA*. *BK* делит основание *OA* пополам, значит, *BK* — высота. Из рисунка находим $OK = BK = \sqrt{5}.$

$$\operatorname{tg} \angle AOB = \frac{BK}{OK} = 1.$$

Примечание.

Можно заметить и доказать, что равнобедренный треугольник *ABO* является прямоугольным. Тогда углы *AOB* и *OAB* равны 45°, а их тангенсы равны 1.

Ещё один способ: тангенс искомого угла можно найти по формуле разности тангенсов через углы, тангенсы которых равны 3 и $\frac{1}{2}.$

Ответ: 1.

4.

Чтобы пятирублевые монеты оказались в разных карманах, Петя должен взять из кармана одну пятирублевую и две десятирублевые монеты. Это можно сделать тремя способами: 5, 10, 10; 10, 5, 10 или 10, 10, 5. Эти события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{5}.$$

Другое рассуждение.

Вероятность того, что Петя взял пятирублевую монету, затем десятирублевую, и затем еще одну десятирублевую (в указанном порядке) равна

$$\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{5}.$$

Поскольку Петя мог достать пятирублевую монету не только первой, но и второй или третьей, вероятность достать набор из одной пятирублевой и двух десятирублевых монет в 3 раза больше. Тем самым, она равна 0,6.

Ответ: 0,6.

Приведем другое решение.

Количество способов взять 3 монеты из 6, чтобы переложить их в другой карман, равно $C_6^3.$ Количество способов выбрать 1 пятирублевую монету из 2 пятирублевых монет и взять вместе с ней еще 2 десятирублевых монеты из имеющихся 4 десятирублевых монет по правилу произведения равно $C_2^1 \cdot C_4^2.$ Поэтому искомая вероятность того, что пятирублевые монеты лежат в разных карманах, равна

$$\frac{C_2^1 \cdot C_4^2}{C_6^3} = \frac{2\cdot 6}{20} = 0,6.$$

5.

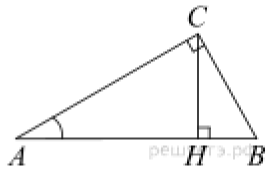
Решим уравнение:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4} = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{4} = -\frac{\pi}{4} + \pi k \Leftrightarrow x = -1 + 4k, k \in \mathbb{Z}.$$

Значению $k=0$ соответствует $x=-1$. Положительным значениям параметра соответствуют положительные значения корней, отрицательным значениям параметра соответствуют меньшие значения корней. Следовательно, наибольшим отрицательным корнем является число −1.

Ответ: −1.

6.



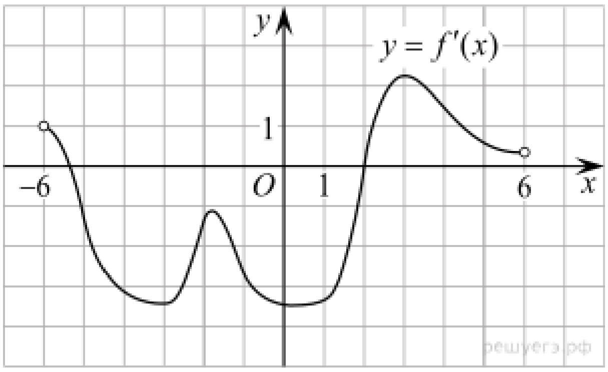
Углы *A* и *HCB* равны как острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

$$BH = CB\sin\widehat{HCB} = CB\sin A = AB\sin^2 A = AB(1-\cos^2 A) =$$

$$AB\left(1-\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 A}\right) = 13\left(1-\frac{1}{26}\right) = 12,5.$$

Ответ: 12,5.

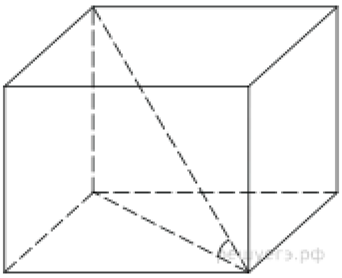
7.



Промежутки возрастания данной функции *f*(*x*) соответствуют промежуткам, на которых ее производная неотрицательна, то есть промежуткам (−6; −5,2] и [2; 6). Данные промежутки содержат целые точки 2, 3, 4 и 5. Их сумма равна 14.

Ответ: 14.

8.



Ребро параллелепипеда, лежащее напротив угла в 45°, равно $\sqrt{8}\sin 45^\circ = 2$, поскольку образует с заданной диагональю и диагональю одной из граней (эта грань является квадратом по условию) равнобедренный треугольник. Диагональ грани, которая является квадратом, тоже равна 2. Значит, площадь этого квадрата равна половине произведения диагоналей $S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2.$ Тогда объем параллелепипеда равен $V=2\cdot 2=4.$

Ответ: 4.

9.

Покажем, что числитель дроби равен знаменателю:

$$g(2-x)=\sqrt[3]{(2-x)(4-(2-x))}=\sqrt[3]{(2-x)(2+x)},$$
$$g(2+x)=\sqrt[3]{(2+x)(4-(2+x))}=\sqrt[3]{(2+x)(2-x)}.$$

Таким образом,

$$\frac{g(2-x)}{g(2+x)}=\frac{\sqrt[3]{(2-x)(2+x)}}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)}}=1.$$

Ответ: 1.

10. Задача сводится к решению неравенства $A\le 1,125A_0$ при известном значении резонансной частоты $\omega_{\text{р}}=360\ \text{с}^{-1}$ и условии, что частота ω меньше резонансной:

$$A\le 1,125A_0\Leftrightarrow \frac{A_0\cdot 360^2}{360^2-\omega^2}\le 1,125A_0\Leftrightarrow 360^2\le 1,125\cdot 360^2-1,125\omega^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1,125\omega^2\le 0,125\cdot 360^2\Leftrightarrow \omega\le 120\text{с}^{-1}.$$

Ответ: 120.

11.

Обозначим первоначальную стоимость акций за 1. Пусть в понедельник акции компании подорожали на $c\cdot 100\%$, и их стоимость стала составлять $1+c\cdot 1$. Во вторник акции подешевели на $c\cdot 100\%$, и их стоимость стала составлять $1+c-c(1+c)$. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник, то есть 0,96. Таким образом,

$$1+c-c(1+c)=0,96\Leftrightarrow 1-c^2=0,96\Leftrightarrow c^2=0,04\underset{c>0}{\Leftrightarrow} c=0,2.$$

Ответ: 20.

12. Оценим логарифм, выделив полный квадрат. В силу убывания логарифмической функции с основанием меньше 1 справедлива цепочка соотношений:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2+6x+12)=\log_{\frac{1}{3}}((x+3)^2+3)\le\log_{\frac{1}{3}}3=-1.$$

Поэтому в точке −3, лежащей на отрезке [−19; −1], функция достигает наибольшего значения, равного −1.

Ответ: −1.

13. а) Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$|\cos x+\sin x|=\sqrt{2}\sin 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(\cos x+\sin x)^2=2\sin^2 2x,\\ \sin 2x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+\sin 2x=2\sin^2 2x,\\ \sin 2x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin 2x=1;\\ \sin 2x=-\dfrac{1}{2},\end{array}\right.\\ \sin 2x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x=1 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+2\pi k \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

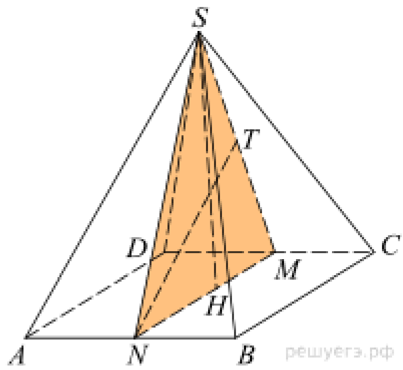
б) Если $k\le 0$, то $x\le\dfrac{\pi}{4}<1,$ поэтому при таких k решений на отрезке [3; 5] нет.

Если $k=1$, то $x=\dfrac{5\pi}{4}.$ Заметим, что $3=\dfrac{12}{4}<\dfrac{5\pi}{4}<\dfrac{20}{4}=5,$ поэтому корень $\dfrac{5\pi}{4}$ лежит на отрезке [3; 5].

Если $k\ge 2$, то $x\ge\dfrac{9\pi}{4}>6,$ поэтому при таких k решений на отрезке [3; 5] нет.

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4}+\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\},\ \dfrac{5\pi}{4}.$

14.

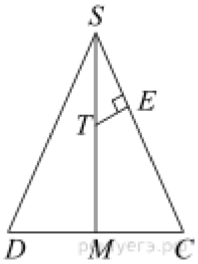


а) Точка H лежит на отрезке MN. Так как $NC = ND$, то $TC = TD$. Это означает, что точка T лежит на SM. Таким образом, точки T и H лежат в плоскости SNM, перпендикулярной плоскости ABC.

$$AH=\frac{AB}{\sqrt{2}}=\sqrt{6},$$
$$AS=\sqrt{SH^2+AH^2}=\sqrt{15},$$
$$MN=AD=2\sqrt{3},$$
$$SM=SN=\sqrt{SA^2-AN^2}=2\sqrt{3}.$$

Значит, треугольник SNM равносторонний, а NT — его высота и, следовательно, медиана, T — середина SM.

б) Пусть E — основание перпендикуляра, опущенного из точки T на



прямую SC. Прямые NT и TE перпендикулярны, так как NT — высота пирамиды $NSCD$. Поскольку отрезок TE перпендикулярен как прямой SC, так и прямой NT, его длина и есть искомое расстояние.

Прямоугольные треугольники SET и SMC подобны, следовательно, $\frac{ET}{MC}=\frac{ST}{SC}$, откуда

$$ET=\frac{ST\cdot CM}{SC}=\frac{SM\cdot CD}{4SC}=\frac{2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}}{4\cdot\sqrt{15}}=\frac{3}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

15.

Сделаем замену: $a=\frac{x-1}{x+2},\ b=\frac{x+1}{x-3}.$ Тогда

$$a+b=\frac{(x-1)(x-3)+(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)}=\frac{2x^2-x+5}{(x+2)(x-3)}.$$

Неравенство принимает вид: $a^2+b^2\le\frac{(a+b)^2}{2},$ откуда

$$a^2+b^2-2ab\le 0\Leftrightarrow(a-b)^2\le 0.$$

Это неравенство выполняется тогда и только тогда, когда $a=b.$ Получаем:

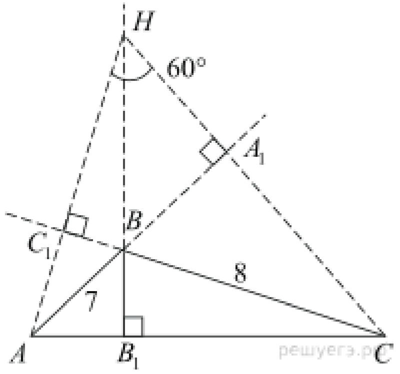
$$\frac{x-1}{x+2}=\frac{x+1}{x-3}\Leftrightarrow x^2-4x+3=x^2+3x+2\Leftrightarrow x=\frac{1}{7}.$$

Ответ: $\frac{1}{7}$.

Примечание.

Задача допускает решение без замены переменной: тождественными преобразованиями данное неравенство приводится к $\frac{(7x-1)^2}{(x+2)^2(x-3)^2}\le 0,$ откуда также получается ответ $x=\frac{1}{7}$.

16.



а) Рассмотрим треугольник AHC. В нем AA_1 и CC_1 — высоты. Тупой угол между высотами дополняет угол между сторонами, к которым они проведены, до 180°. Поэтому $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{AHC} = 120^\circ$.

б) Рассмотрим треугольник AHC, в нем $BH = AC\operatorname{ctg}\widehat{AHC} = \dfrac{AC}{\sqrt{3}}$. Сторону AC найдём по теореме косинусов:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot \cos\widehat{ABC} =$$

$$= 49 + 64 - 2\cdot 7\cdot 8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 113 + 56 = 169.$$

Тем самым, $AC = 13,\ BH = \dfrac{13}{\sqrt{3}}.$

Ответ: б) $\dfrac{13}{\sqrt{3}}$.

Докажем утверждение, использованное при решении пункта а).

В четырехугольнике HC_1BA_1 сумма прямых углов HC_1B и HA_1B равна 180°, поэтому сумма двух других углов C_1HA_1 и C_1BA_1 также равна 180°. Тогда $\angle C_1BA_1 = 180^\circ - \angle C_1HA_1$. Углы C_1BA_1 и ABC равны как вертикальные, поэтому $\angle ABC + \angle C_1HA_1 = 180^\circ$. Таким образом, тупой угол между высотами дополняет угол между сторонами, к которым они проведены, до 180°.

Сформулируем теорему, которую мы применили для решения пункта б).

Расстояние от вершины треугольника до точки пересечения его высот равно произведению стороны, противолежащей этой вершине, на котангенс угла при этой вершине. Действительно, пусть высоты AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Стороны прямоугольных треугольников ACC_1 и BHC_1 взаимно перпендикулярны, а потому их острые углы ACC_1 и BHC_1 равны. Следовательно, эти треугольники подобны. Тогда $\dfrac{HB}{AC} = \dfrac{HC_1}{CC_1} = \operatorname{ctg}\widehat{C_1HC} = \operatorname{ctg}\widehat{AHC},$ откуда $HB = AC\operatorname{ctg}\widehat{AHC}.$ Для остроугольного треугольника доказательство аналогично. Для прямоугольного треугольника доказательство напрямую следует из определения котангенса.

Рекомендуем сравнить эту задачу с заданием 505425 из экзаменационного варианта ЕГЭ 2014 года.

Приведем другое решение пункта б):

Рассмотрим треугольник C_1CH, заметим, что угол C_1CH равен 30°. Поэтому в прямоугольном треугольнике CBA_1 катет BA_1 вдвое меньше гипотенузы: $BA_1 = 4$. Значит, $AA_1 = 11$. Из треугольника AA_1H находим $HA_1 = AA_1 \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{11}{\sqrt{3}}$. Теперь по теореме Пифагора вычисляем:

$$BH = \sqrt{BA_1^2 + HA_1^2} = \sqrt{16 + \frac{121}{3}} = \frac{13}{\sqrt{3}}.$$

Приведем ещё одно решение пункта б):

Заметим, что в треугольнике AHC точка B — ортоцентр. В силу свойства ортоцентра $AB \cdot BA_1 = HB \cdot BB_1$, откуда получаем: $HB = \frac{AB \cdot BA_1}{BB_1}$ (это же следует из подобия треугольников ABB_1 и BCA_1).

Из прямоугольного треугольника CBA_1 находим катет BA_1, противолежащий углу в 30°: $BA_1 = 4$. Из треугольника ABC находим высоту:

$$BB_1 = \frac{2S_{ABC}}{AC} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ}{13} = \frac{28\sqrt{3}}{13}.$$

Тогда $HB = \dfrac{7 \cdot 4}{\frac{28\sqrt{3}}{13}} = \dfrac{13}{\sqrt{3}}.$

17. Ежемесячное увеличение валютной массы, находящейся в обращении, составляет $100 - 50 = 50$ тыс. долларов, поэтому через n месяцев в стране будет $(1000 + 50n)$ тыс. долларов.

Количество фальшивых долларов ежемесячно уменьшается на $50 \cdot 0{,}3 - 100 \cdot 0{,}1 = 15 - 10 = 5$ тыс. долларов. Изначально их было $1\,000\,000 \cdot 0{,}2 = 200\,000$, поэтому через n месяцев в стране будет $(200 - 5n)$ тыс. фальшивых долларов.

Через n месяцев фальшивые доллары составили 5% от общего количества долларов. Имеем:

$$(1000 + 50n) \cdot 0{,}05 = 200 - 5n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 50 + 2{,}5n = 200 - 5n \Leftrightarrow 7{,}5n = 150 \Leftrightarrow n = 20.$$

Ответ: через 20 месяцев.

18.

Введём обозначения: $a - 3 = b,\ f(x) = x^4 + b^2,\ g(x) = |x - b| + |x + b|.$

В этих обозначениях исходное уравнение принимает вид $f(x) = g(x).$

Если некоторое число x_0 является решением этого уравнения, то и число $-x_0$ также является его решением, поскольку функции $f(x)$ и $g(x)$ — чётные. Значит, если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственное решение, то это решение $x = 0.$

Решим уравнение $f(0) = g(0)$ относительно b:

$$b^2 = 2|b| \Leftrightarrow |b| \cdot (|b| - 2) = 0,$$

значит, $x = 0$ является решением уравнения $f(x) = g(x)$ при $b = 0$ или $|b| = 2.$

При $b=0$ уравнение принимает вид $x^4=2|x|$ и имеет три различных решения: $x=-\sqrt[3]{2}$, $x=0$, $x=\sqrt[3]{2}$.

Заметим, что $g(x)=2|x|$ при $|x|\geq|b|$, $g(x)=2|b|$ при $|x|<|b|$.

Рассмотрим случай $|b|=2$.

Если $|x|\geq|b|=2$, то $f(x)=x^4+b^2\geq x^4\geq|x|\cdot x^2\cdot|x|\geq 2x^2\cdot|b|>2|x|=g(x)$, то есть уравнение решений не имеет.

Если $|x|<|b|=2$, то $f(x)=x^4+b^2\geq b^2=2|b|=g(x)$, причём равенство возможно только при $x=0$.

Значит, при $|b|=2$ уравнение $f(x)=g(x)$ имеет единственное решение.

Рассмотрим случай $|b|>2$.

Если $|x|\geq|b|>2$, то $f(x)=x^4+b^2\geq x^4\geq|x|\cdot x^2\cdot|x|\geq 2x^2\cdot|b|>2|x|=g(x)$, то есть уравнение решений не имеет.

Если $|x|<|b|$, то $f(x)=x^4+b^2\geq b^2>2|b|=g(x)$, то есть уравнение решений не имеет.

Рассмотрим случай $0<|b|<2$.

В этом случае верны неравенства $f(0)<g(0)$ и $f(2)>g(2)$, так как $b^2<2|b|$ и $16+b^2>4$. Значит, уравнение $f(x)=g(x)$ имеет решения отличные от нуля, а значит решений больше одного.

Таким образом, уравнение $f(x)=g(x)$ имеет единственное решение или не имеет решений при $b\leq-2$ и $b\geq 2$, то есть при $a\leq 1$ и $a\geq 5$.

Ответ: $a\leq 1$, $a\geq 5$.

19.

а) Пусть число a_i уменьшили на 2. Тогда его уменьшили на $\frac{2}{a_i}\cdot 100=\frac{200}{a_i}\%$. Следовательно, $r_i=\frac{200}{a_i}$. Так как $a_i\geq 50$ для всех i, то $r_i\leq 4$ и их среднее арифметическое также не превосходит 4. Поэтому оно не может равняться 5.

б) Рассмотрим два числа: 50 и 150. Если число 50 уменьшить на 2 (т. е. на 4%), а число 150 уменьшить на 2% (то есть на 3), то $r_1=4$ и $r_2=2$. Их среднее арифметическое равно 3, что больше 2. При этом сумма чисел уменьшилась на 5, что больше, чем $2n=4$.

в) Пусть k чисел из 30 уменьшили на 2, а остальные $30-k$ уменьшили на 2%. Так как каждое число не меньше 50, каждое из чисел уменьшили по крайней мере на 1 (2% от 50 равно 1). Таким образом, сумму всех 30-и чисел уменьшили по крайней мере на $2k+30-k=k+30$. По условию, сумму уменьшили ровно на 40. Следовательно, $k+30\leq 40$, откуда $k\leq 10$.

Напомним, что если число a_i уменьшили на 2, то его уменьшили на $r_i=\frac{200}{a_i}\%$; и так как $a_i\geq 50$, то $r_i\leq 4$. Значит,

$$\frac{r_1+\cdots+r_{30}}{30} \leq \frac{4k+2(30-k)}{30} = \frac{2k+60}{30} \leq \frac{2\cdot 10+60}{30} = \frac{8}{3}.$$

Приведём пример набора из 30 чисел, для которого среднее арифметическое чисел $r_1, \ldots, r_{30}$ равно $\frac{8}{3}$. Пусть все числа равны 50, и пусть 10 из этих чисел уменьшили на 2 (т. е. на 4%), а каждое из оставшихся 20-ти чисел уменьшили на 2%. Тогда

$$\frac{r_1+\cdots+r_{30}}{30} = \frac{10\cdot 4+20\cdot 2}{30} = \frac{8}{3}.$$

Ответ: а) нет; б) да; в) $\frac{8}{3}$.